Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées.[1]

Par Charles Jordan à Budapest.

I. Problèmes à une variable.

§ 1. *Premier problème.* Une urne contient a boules blanches et b boules noires. Soit $a+b=m$. On tire une boule, puis on rajoute dans l'urne $h+1$ boules de la même couleur que la boule sortie. h peut être un entier positif, négatif ou zéro. On répète l'opération n fois et l'on demande la probabilité d'obtenir ν boules blanches dans ces n épreuves. Evidemment on doit avoir

$$a > -(\nu-1)h \text{ et } b > -(n-\nu-1)h.$$

La probabilité cherchée $P(\nu)$ est déduite du théorème des probabilités composées.

$$(1)\quad P(\nu)=\binom{n}{\nu}\frac{a(a+h)\ldots(a+\nu h-h)b(b+h)\ldots(b+nh-\nu h-h)}{m(m+h)\ldots(m+nh-h)}.$$ [2]

Le cas $h=0$ correspond au problème de Bernoulli : on remet après chaque tirage la boule sortie.

Le cas $h=-1$ est aussi remarquable: on tire les boules successivement sans rien remettre ou l'on tire n boules en même temps.

Supposons $h \neq 0$ et écrivons pour simplifier $a/h=\beta$, $m/h=\mu$ et $b/h=\mu-\beta$; la probabilité (1) peut être mise sous la forme

[1]) Voir: Ch. Jordan, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 184, p. 315.

[2]) Dans ce qui suit, le symbole $\binom{z}{\lambda}$ signifie le coefficient généralisé du binome:

$$\binom{z}{\lambda}=\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(z-\lambda+1)}.$$

$$(2) \qquad P(\nu)=\frac{\binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}}{\binom{-\mu}{n}}.$$

On peut encore transformer cette formule en remarquant que

$$\binom{\beta-\mu}{n-\nu}=\frac{\binom{n}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{\beta-\mu-n+\nu}{\nu}}=(-1)^{\nu}\,\frac{\binom{n}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{\mu-\beta+n-1}{\nu}};$$

par suite, si l'on pose $\alpha=-n$ et $\gamma=\beta-\mu-n+1$, il résulte de (2)

$$(3) \qquad P(\nu)=\frac{\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{-\mu}{n}}\,(-1)^{\nu}\,\frac{\binom{-\alpha}{\nu}\binom{-\beta}{\nu}}{\binom{-\gamma}{\nu}}$$

Cette transformation n'est justifiée que si $\binom{\beta-\mu}{n}\neq 0$. Lorsque $h>0$, ceci a toujours lieu. Lorsque $h<0$ et β, μ sont des entiers, il faut que l'on ait en outre $\beta-\mu\geqq n$ c.-à-d. $b\geqq -hn$; si cette condition n'est pas satisfaite, on a $-\gamma\geqq 0$ et pour les valeurs $\nu>-\gamma$, le dénominateur aussi devient zéro.

De la formule (2) on peut tirer la conclusion importante que la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n+1$-ième coup est *indépendante* de h et de n.

En effet la probabilité de tirer blanc à la $n+1$-ième épreuve après avoir obtenu ν boules blanches en n épreuves est la probabilité composée

$$(4) \qquad P(\nu)\cdot\frac{a+\nu h}{m+nh}$$

enfin la probabilité totale de tirer blanc quels que soient les résultats précédents est égale à la somme des probabilités (4) pour toutes les valeurs possibles de $\nu=0, 1, 2, \ldots n$. On a donc

$$P=\frac{a}{m}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\binom{-\beta-1}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}}{\binom{-\mu-1}{n}}.$$

Comme la somme en facteur est égale à l'unité d'après une formule connue de Cauchy, il résulte que $P=a/m$.

La fonction génératrice $G(x)$ de la probabilité (3) peut s'exprimer à l'aide de la fonction hypergéométrique de Gauss

$$(5) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\,\frac{\binom{-\alpha}{\nu}\binom{-\beta}{\nu}}{\binom{-\gamma}{\nu}}\,x^{\nu}.$$

En effet

$$(6)\qquad G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P(\nu)\,x^{\nu} = \frac{\binom{\beta-\mu}{n}}{\binom{-\mu}{n}}\, F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

On peut faire varier ν de zéro à ∞ au lieu de 0 à n, car si $\nu > n$ on a $\binom{-\alpha}{\nu} = 0$ et d'après la formule (3) $P(\nu) = 0$.

La somme des probabilités (3) pour toutes les valeurs de ν étant équivalente à la certitude doit être égale à l'unité.

De (6) on conclut que cette somme est aussi égale à $G(1)$. En y posant $x = 1$, on obtient la formule connue

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\binom{-\mu}{n}}{\binom{\beta-\mu}{n}} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Donc la fonction *génératrice* de la probabilité (1) s'écrit

$$(7)\qquad G(x) = \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}.$$

Comme dans le cas considéré $\alpha = -n$ est un entier négatif, $G(x)$ est un polynome. Les termes de l'expression (5) ont toujours une valeur finie sauf pour des valeurs négatives entières de γ telles que $\nu > -\gamma$. On peut montrer sans difficulté que les termes de $G(x)$ sont finis même pour ces valeurs de γ.

Faisant appel à la fonction génératrice (7), on peut déterminer les moments de la probabilité (1). Définissons le *moment factoriel* de degré s par

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-s+1)\,P(\nu).$$

On a donc $\mathfrak{M}_0 = G(1) = 1$. De plus de (6) on tire

$$\mathfrak{M}_s = [x^s D^{(s)} G(x)]_{x=1}.$$

Or la fonction $G(x)$ satisfait à l'équation différentielle hypergéométrique

$$(8)\qquad x(1-x)D^{(2)}G(x) + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\,DG(x) - \alpha\beta G(x) = 0.$$

En posant $x = 1$, on trouve

$$\mathfrak{M}_1 = D\,G(1) = \frac{\alpha\beta}{\gamma-\alpha-\beta-1} = -\frac{\alpha\beta}{\mu} = \frac{na}{m}.$$

Il est remarquable que cette grandeur est indépendante de h.

Si l'on prend $s-1$ fois la dérivée de (8) par rapport à x et si l'on pose $x = 1$, on a

(9) $$\mathfrak{M}_s = D^{(s)}\,G(1) = s!\,\frac{\binom{-\alpha}{s}\binom{-\beta}{s}}{\binom{\gamma-\alpha-\beta-1}{s}} = \frac{\binom{n}{s}\binom{-\beta}{s}}{\binom{-\mu}{s}}\,s!$$

Notons le cas particulier

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{n\,(n-1)\,a\,(a+h)}{m\,(m+h)}\,.$$

La formule (9) montre que les moments factoriels de degré supérieur à n sont nuls; cela découle du reste de la définition de ces moments. Par contre, les moments de puissance de degré quelconque seront généralement différents de zéro. Les moments factoriels sont donc plus pratiques.

On peut exprimer la moyenne σ^2 des carrés des écarts $\nu - \mathfrak{M}_1$ à l'aide des moments factoriels déterminés ci-dessus

(9′) $$\sigma^2 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_1^2.$$

De la formule (9) il résulte:

(10) $$\sigma^2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mu+1}\,(n+\mu-\beta-\mathfrak{M}_1).$$

Pour avoir la somme σ_B^2 des carrés des écarts du problème de Bernoulli correspondant il suffit poser dans (10) $h=0$; on trouve

(11) $$\sigma_B^2 = \mathfrak{M}_1\left(1-\frac{\mathfrak{M}_1}{n}\right).$$

En comparant les valeurs (10) et (11) lorsque h est négatif ou $\mu < -1$, on trouve

$$\sigma_B^2 > \sigma^2$$

puisque cette inégalité peut se réduire alors à $n > 1$. Par contre lorsque h est positif, il vient pareillement $\sigma^2 > \sigma_B^2$.

Comme la fonction hypergéométrique ne contient que trois paramètres disponibles, trois moments seront seulement indépendants, par suite on pourra calculer tous les autres moments en fonction de $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3$.

Inversement lorsque les moments factoriels $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_3$ d'une fonction de fréquence statistique sont donnés, on peut déterminer à l'aide des formules (9) une fonction hypergéométrique admettant ces mêmes moments. On obtiendra ainsi une représentation conforme au principe des moments. Lorsque $\mathfrak{M}_0 = 1$ on trouve

(12) $$\mu = \frac{2\,(\mathfrak{M}_2^2 - \mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2)}{\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1^2\,\mathfrak{M}_2 - 2\,\mathfrak{M}_2^2}\,.$$

Si cette quantité est plus grande que zéro, on conclut que $h > 0$; inversement de $\mu < 0$ il suit $h < 0$.

Si le dénominateur de l'expression (12) est nul, il résulte $\mu = \infty$, et $h = 0$; c.-à-d. la répartition correspond à celle du problème de Bernoulli. Dans ce cas on n'a que deux constantes disponibles, il n'y a que deux moments indépendants. On peut vérifier facilement que le dénominateur de (12) égalé à zéro donne précisément la relation qui existe entre les trois premiers moments.

Dans le cas général, les formules (9) conduisent à l'équation du second degré

$$z^2 \mathfrak{M}_1 - z[\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mu(\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1^2)] - \mu \mathfrak{M}_1^2 = 0 \tag{13}$$

dont les racines sont n et $-\beta$.

Si $\mu > 0$, l'une des racines de l'équation est positive, l'autre négative; la première est égale à n, la seconde à $-\beta$; par suite β sera aussi plus grand que zéro.

Si $\mu < 0$, les deux racines de (13) sont positives, donc β sera négatif; on pourra prendre pour n l'une quelconque des racines, les formules étant symétriques par rapport à n et $-\beta$. On aura donc deux représentations également acceptables. On devra nécessairement avoir $n \leqq -\mu$ et $-\beta \leqq -\mu$.

On détermine ensuite $a = \beta h$ et $m = \mu h$; on disposera de h de manière que a et m soient au moins approximativement des entiers positifs.

§ 2. La probabilité pour que dans les conditions du § 1, le nombre des cas favorables ne dépasse pas λ en n épreuves, s'obtient en faisant la somme des probabilités $P(\nu)$ de la formule (2) du § 1.

$$\mathfrak{P}(n, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} P(\nu) = \frac{1}{\binom{-\mu}{n}} \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}.$$

§ 3. Supposons que l'on ait $\mu - 1$ urnes contenant $m = \mu h$ boules dont $a = \beta h$ blanches; h est positif et β prend les valeurs $1, 2, \ldots, (\mu - 1)$. On choisit une urne, puis dans les conditions du § 1 on fait n tirages, et l'on demande la probabilité pour obtenir ν boules blanches.

La probabilité de choisir une urne contenant $a = \beta h$ boules blanches est $1/(\mu - 1)$; la probabilité d'obtenir de cette urne ν blancs en n épreuves est donnée par la formule (2) du § 1; enfin la probabilité totale d'obtenir ν blancs en n épreuves quelle que soit l'urne choisie est

$$P = \frac{1}{(\mu-1)\binom{-\mu}{n}} \sum_{\beta=1}^{\mu-1} \binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}. \tag{1}$$

Pour déterminer d'abord la somme indéfinie correspondant à la somme du second membre, écrivons-la sous la forme

$$\sum (-1)^{\nu} \binom{\beta-\mu}{n-\nu}\binom{\beta+\nu-1}{\nu};$$

la sommation successive par parties, effectuée en prenant $n-\nu$ fois la différence du premier facteur et en sommant le second, conduit à l'expression

$$\sum_{x=\nu+1}^{n+1} (-1)^{x+1} \binom{\beta+x-2}{x}\binom{\beta-\mu}{n+1-x}. \tag{2}$$

Il faut encore déterminer, comme dans le cas des intégrales définies les valeurs de (2) aux limites de la variable β. Conformément aux régles du calcul des différences finies, il faut prendre $\beta=\mu$ comme limite supérieure et $\beta=1$ comme limite inférieure de la somme (1).

Pour $\beta=\mu$, le terme non nul de (2) est celui dans lequel $x=n+1$; on aura donc à cette limite

$$(-1)^n \binom{\mu+n-1}{n+1} = -\binom{1-\mu}{n+1}.$$

A la limite inférieure $\beta=1$, tous les termes de (2) sont nuls; donc la probabilité (1) est

$$P = 1/(n+1)\,; \tag{3}$$

il est à remarquer qu'elle est indépendante de ν, de h et de μ.

Lorsque $h<0$, le nombre des urnes est $(-\mu-1)$ et ces urnes contiennent $a=\beta h$ boules blanches où $-\beta$ prend les valeurs $1, 2, \ldots, (-\mu-1)$. On peut montrer de la même manière que précédemment, qu'en choisissant une urne, puis en tirant successivement comme au § 1, la probabilité pour obtenir ν boules blanches quelle que soit l'urne choisie, est encore égale à la probabilité (3).

§ 4. *Probabilité des causes.* Une urne contient m boules blanches ou noires en proportion inconnue. On a obtenu en n épreuves dans les conditions du § 1, ν boules blanches et $n-\nu$ boules noires. On suppose d'abord $h>0$ et l'on demande la probabilité Δp pour que l'urne contienne $a=\beta h$ boules blanches, en supposant les valeurs de $\beta = 1, 2, 3, \ldots, (\mu - 1)$ également probables.

En partant de la formule (2) du § 1, le théorème de Bayes conduit à

$$\Delta \mathfrak{p} = \binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu} \Big/ \sum_{s=1}^{\mu}\binom{-s}{\nu}\binom{s-\mu}{n-\nu}. \tag{1}$$

On a vu au § 3 que la somme au dénominateur est égale à $-\binom{1-\mu}{n+1}$; par suite on aura

$$\Delta \mathfrak{p} = \frac{-\binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}}{\binom{1-\mu}{n+1}}. \tag{2}$$

De la probabilité (2) on peut déduire la probabilité pour que le nombre a des boules blanches contenues dans l'urne au début ne dépasse pas τh. Il suffit de faire la somme des probabilités (2) β variant de 1 à τ.

$$\mathfrak{p} = \frac{-1}{\binom{1-\mu}{n+1}} \sum_{\beta=1}^{\tau}\binom{-\beta}{\nu}\binom{\beta-\mu}{n-\nu}. \tag{3}$$

h étant positif, nous avons vu que la somme indéfinie au second membre de (3) est donnée par la formule (2) du § 3; et la somme définie est obtenue en y posant aux limites $\beta = \tau + 1$ et $\beta = 1$, donc cette probabilité est égale à

$$\mathfrak{p} = \sum_{x=\nu+1}^{n+1}\binom{-\tau}{x}\binom{\tau+1-\mu}{n+1-x} \Big/ \binom{1-\mu}{n+1}. \tag{4}$$

Lorsque $h < 0$, on a aussi $\mu < 0$ et $\beta < 0$; la probabilité pour que le nombre a des boules blanches soit égale à βh est encore donnée par la formule (1) mais dans ce cas la somme au dénominateur est $\binom{1-\mu}{n+1}$. La probabilité pour que a ne dépasse pas τh s'exprime par une somme analogue à (3) où β variera de 1 à $-\tau$.

Une méthode semblable à celle suivie dans le cas de $h > 0$ conduit au résultat suivant, si $h < 0$

$$\mathfrak{p} = \sum_{x=\nu+1}^{n+1}\binom{1-\tau}{x}\binom{\tau-\mu}{n+1-x} \Big/ \binom{1-\mu}{n+1}. \tag{5}$$

Des formules (4) et (5) on déduit le *théorème* suivant:

1. $h > 0$. Ayant obtenu en n épreuves, dans les conditions du § 1, ν boules blanches d'une urne contenant $m = \mu h$ boules

blanches et noires en proportion inconnue, la probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules blanches contenues dans l'urne ne dépasse pas $a = \tau h$ (en considérant comme également probables les compositions contenant $h, 2h, 3h, \ldots, (\mu - 1)h$ boules blanches) est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules blanches obtenues en $n+1$ épreuves, dans les conditions du § 1, d'une urne qui contient au début $m-h$ boules dont a blanches, soit plus grand que ν.

2. $h < 0$. On a obtenu en n épreuves, dans les conditions du § 1, ν boules blanches d'une urne qui contient $m = \mu h$ boules blanches et noires en proportion inconnue. On considère les compositions contenant $-h, -2h, \ldots, (-\mu+1)h$ boules blanches comme également probables. La probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules blanches contenues dans l'urne ne dépasse pas $a = \tau h$ est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules blanches obtenues en $n+1$ épreuves d'une urne contenant au début $m-h$ boules dont $a-h$ blanches, soit plus grand que ν.

§ 5. *Second problème.* Une urne contient m boules dont a blanches. On tire une boule, si elle est blanche la partie est terminée. Si elle est noire on rajoute à l'urne $h+1$ boules noires (h étant un entier positif, négatif ou zéro) et l'on tire de nouveau. On répète l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche, la partie est alors terminée.

On demande la probabilité pour que blanc ne sorte qu'au ν-ième coup.[3]) On trouve pour cette probabilité

$$(1) \quad P(\nu) = \frac{(m-a)(m-a+h)(m-a+2h)\ldots(m-a+\nu h-2h)\,a}{m(m+h)(m+2h)\ldots(m+\nu h-h)}.$$

Supposons d'abord $h \neq 0$ et posons pour simplifier $m/h = \mu$, $a/h = \omega$. La probabilité (1) devient

$$(2) \quad P(\nu) = \frac{\omega \binom{\mu-\omega+\nu-2}{\nu}}{(\mu-\omega-1)\binom{\mu+\nu-1}{\nu}} = \frac{\omega}{(\mu-\omega-1)} \frac{(-1)^\nu \binom{\omega+1-\mu}{\nu}\binom{-1}{\nu}}{\binom{-\mu}{\nu}}.$$

Il en résulte qu'en posant $\alpha = \mu - \omega - 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = \mu$, on peut exprimer la fonction génératrice $G(x)$ de cette probabi-

---

[3]) Ce problème est la généralisation du célèbre problème de Saint-Pétersbourg. J'y ai été conduit en réfléchissant sur une question de physique mathématique que M. E. Bródy avait posée.

lité à l'aide de la fonction hypergéométrique

$$G(x) = \frac{\omega}{\mu - \omega - 1}\,[F(\alpha, \beta, \gamma, x) - 1]. \tag{3}$$

La somme des probabilités (2), si ν varie de un à ∞, devant être égale à l'unité, de (3) il résulte:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\mu - 1}{\omega}$$

conformément à la formule du § 1.

Par suite la fonction génératrice peut s'écrire

$$G(x) = \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x) - 1}{F(\alpha, \beta, \gamma, 1) - 1}. \tag{4}$$

Le moment factoriel de degré s sera d'après la formule (9) du § 1

$$\mathfrak{M}_s = \frac{\mu - 1}{\mu - \omega - 1}\;\frac{(-1)^s\binom{\omega+1-\mu}{s}}{\binom{-\mu}{s}} \tag{5}$$

et, en particulier, $\mathfrak{M}_0 = 1$, $\mathfrak{M}_1 = \dfrac{\mu - 1}{\omega - 1}$, $\mathfrak{M}_2 = \dfrac{2(\mu - 1)(\mu - \omega)}{(\omega - 1)(\omega - 2)}$.

D'après la formule (9') du § 1 la somme σ^2 des carrés des écarts $\nu - \mathfrak{M}_1$ est

$$\sigma^2 = \frac{(\mu - \omega)(\mu - 1)\,\omega}{(\omega - 1)^2(\omega - 2)}. \tag{6}$$

Pour avoir la somme σ_B^2 des carrés des écarts correspondant au problème de Bernoulli c.-à-d. à $h = 0$, il suffit de déterminer la valeur de σ^2 à cette limite; on trouve

$$\sigma_B^2 = \frac{(m - a)\,m}{a^2}. \tag{7}$$

En comparant les valeurs (6) et (7), on peut montrer que si $h < 0$, on a toujours $\sigma^2 < \sigma_B^2$.

Lorsque $h > 0$ et $a/m < 7/8$, on a $\sigma^2 > \sigma_B^2$; par contre lorsque $h > 0$ et $a/m \geqq 7/8$, σ^2 peut dans certains cas particuliers être plus petit que σ_B^2.

Inversement si les moments factoriels $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ des observations statistiques correspondant au problème sont donnés, on peut déterminer à l'aide des formules (5) les grandeurs μ et ω de la représentation hypergéométrique:

$$\mu = 1 + \frac{\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2 + 2\mathfrak{M}_1(1 - \mathfrak{M}_1)}$$

$$\omega = 1 + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_2 + 2\mathfrak{M}_1(1 - \mathfrak{M}_1)}.$$

Lorsque le dénominateur est nul, il résulte des formules précédentes que $h=0$.

μ et ω auront toujours le même signe que h. On disposera de h de manière que $m=\mu h$ et $a=\omega h$ soient des entiers, du moins approximativement.

II. Problèmes à plusieurs variables.

§ 6. Une urne contient b_1 boules marquées 1, b_2 boules marquées 2, et ainsi de suite, enfin b_{k+1} boules marquées $k+1$. Soit $b_1+b_2+\ldots+b_{k+1}=m$.

On tire une boule puis on rajoute à l'urne $h+1$ boules marquées du même numéro que la boule sortie. On répète l'opération n fois et l'on demande la probabilité d'obtenir en n épreuves ν_1 numéros 1, ν_2 numéros 2, ... et ν_{k+1} numéros $k+1$. Comme on doit avoir $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots+\nu_{k+1}=n$, le problème est à k variables indépendantes. On peut le traîter dans le cas général à l'aide de la fonction hypergéométrique F_D de M. Lauricella; lorsque $k=2$ cette fonction se réduit à la fonction hypergéométrique F_1 de M. Appell.[4])

Le cas $h=0$ correspond au problème à k variables des épreuves répétées de Bernoulli. Le cas $h=-1$ est aussi remarquable: on tire succesivement n boules sans rien remettre ou on les tire en même temps.

Pour que la probabilité demandée soit différente de zéro, il faut avoir $b_i>-(\nu_i-1)h$; si cette condition est satisfaite, on se sert du théorème des probabilités composées, et on obtient pour la probabilité cherchée

$$(1)\quad P(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k)=\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_{k+1}!}\,\frac{\prod\limits_{i=1}^{k+1} b_i(b_i+h)\ldots(b_i+\nu_i h-h)}{m(m+h)\ldots(m+nh-h)}.$$

En supposant $h\neq 0$ on peut écrire pour simplifier $\beta_i=b_i/h$ et $\mu=m/h$, alors la probabilité (1) devient

$$(2)\qquad P(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k)=\frac{1}{\binom{-\mu}{n}}\prod_{i=1}^{k+1}\binom{-\beta_i}{\nu_i}.$$

De la formule (2) on déduit que la probabilité totale de tirer une boule marquée i au $n+1$-ième coup est indépendante

---

4) P. Appell et J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Paris, 1926.

de h et de n. En effet la probabilité de tirer le numéro i à cette épreuve, après avoir obtenu en n épreuves ν_1 numéros 1, ν_2 numéros 2, ..., ν_{k+1} numéros $k+1$ est

$$P(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)\,\frac{b_i+\nu_i h}{m+nh}$$

enfin la probabilité totale de tirer i, quelles que soient les gandeurs $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k+1}$ obtenues, est la somme des probabilités pour toutes les valeurs possibles de $\nu_1, \ldots, \nu_{k+1}$, c.-à-d.

$$P=\frac{b_i}{m\binom{-\mu-1}{n}}\sum\ldots\sum\binom{-\beta_i-1}{\nu_i}\binom{-\beta_1}{\nu_1}\ldots\binom{-\beta_{k+1}}{\nu_{k+1}}$$

Comme la somme en facteur est égale à $\binom{-\mu-1}{n}$ d'après une formule connue de Cauchy, on a $P=b_i/m$.

On peut écrire le dernier facteur de la probabilité (2) de la manière suivante

$$\binom{-\beta_{k+1}}{\nu_{k+1}}=(-1)^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k}\frac{\binom{-\beta_{k+1}}{n}\binom{n}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\binom{\beta_{k+1}+n-1}{\nu_1+\ldots+\nu_k}};$$

par suite en posant $\alpha=-n$ et $\gamma=\beta_{k+1}-n+1$, cette probabilité devient

$$(3)\quad P(\nu_1, \ldots, \nu_k)=\frac{\binom{-\beta_{k+1}}{n}}{\binom{-\mu}{n}}(-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_k}\frac{\binom{-\alpha}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\binom{-\gamma}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}\prod_{i=1}^{k}\binom{-\beta_i}{\nu_i}.$$

La fonction hypergéométrique F_D est définie par l'équation suivante.[5])

$$(4)\quad F_D(x_1, \ldots, x_k)=$$
$$=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{\nu_k=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1+\ldots+\nu_k}\frac{\binom{-\alpha}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\binom{-\gamma}{\nu_1+\ldots+\nu_k}}\prod_{i=1}^{k}\binom{-\beta_i}{\nu_i}x_i^{\nu_i}$$

Il en résulte que l'on peut exprimer la fonction génératrice de la probabilité (3) à l'aide de cette fonction

$$(5)\quad \begin{aligned} G(x_1, \ldots, x_k) &= \sum\ldots\sum P(\nu_1, \ldots, \nu_k)\,x_1^{\nu_1}\ldots x_k^{\nu_k}= \\ &=\frac{\binom{-\beta_{k+1}}{n}}{\binom{-\mu}{n}}F_D(x_1, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

---

[5]) Voir loc. cit. p. 115; elle se réduit pour $k=2$ à la fonction F_1 de M. Appell, p. 14.

On peut faire varier ν_i de zéro à ∞ au lieu de zéro à n car $P(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ est nulle lorsque $\nu_i > n$.

La somme des probabilités (3) prise pour toutes les valeurs possibles de ν_i est équivalente à la certitude, donc égale à l'unité; par suite en posant dans (5) $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$ on doit avoir $G(1, \ldots, 1) = 1$ ou

$$F_D(1, \ldots, 1) = \frac{\binom{-\mu}{n}}{\binom{-\beta_{k+1}}{n}}$$

conformément à la formule donnée par M. Appell (p. 117).

La fonction génératrice de la probabilité cherchée sera donc

$$G(x_1, \ldots, x_k) = \frac{F_D(x_1, \ldots, x_k)}{F_D(1, \ldots, 1)}. \tag{6}$$

Le moment factoriel de degré c_1 en ν_1, de degré c_2 en ν_2, de degré c_k en ν_k, si $s = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$, est donné par

$$\mathfrak{M}(c_1, c_2, \ldots, c_k) = \left[\frac{\partial^s G(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{c_1} \partial x_2^{c_2} \ldots \partial x_k^{c_k}}\right]_{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1.} \tag{7}$$

Pour déterminer ces dérivées il faut remarquer que la fonction G satisfait aux équations aux dérivées partielles de F_D données par M. Appell (p. 117). On peut écrire ces équations sous la forme légèrement modifiée

$$(1 - x_i) \sum_{\mu=1}^{k} x_\mu \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_\mu} + \\ + [\gamma - (\alpha + 1) x_i] \frac{\partial G}{\partial x_i} - \beta_i \sum_{\mu=1}^{k} x_\mu \frac{\partial G}{\partial x_\mu} - \alpha \beta_i G = 0. \tag{8}$$

Ecrivons pour abréger

$$\mathfrak{S} = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial G}{\partial x_\mu} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}' = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_\mu}.$$

Si l'on pose dans (8) $x_1 = \ldots = x_k = 1$ on obtient

$$(\gamma - \alpha - 1) \frac{\partial G}{\partial x_i} - \beta_i \mathfrak{S} - \alpha \beta_i = 0. \tag{9}$$

Dans les formules (9) à (18) les arguments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des fonctions $\frac{\partial G}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, et $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i}$ sont tous égaux à l'unité.

En faisant la somme de (9) pour $i = 1, 2, \ldots, k$, on en tire

$$\mathfrak{S} = \frac{\alpha \Sigma \beta_i}{\gamma - \alpha - 1 - \Sigma \beta_i} = -\frac{\alpha}{\mu} \sum_{i=1}^{k} \beta_i ; \tag{10}$$

ensuite il vient de (9)

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = -\frac{\alpha \beta_i}{\mu} = \frac{n b_i}{m} \tag{11}$$

donc les moments factoriels du premier degré sont indépendants de h.

Prenons la dérivée de (8) par rapport à x_ν en supposant $\nu \neq i$ et posons $x_1 = \ldots = x_k = 1$; on trouve

$$(\gamma - \alpha - 1) \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \, \partial x_\nu} - \beta_i \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_\nu} - \alpha (\beta_i + 1) \frac{\partial G}{\partial x_\nu} = 0 \tag{12}$$

puis en prenant la dérivée de (8) par rapport à x_i et en posant $x_\mu = 1$

$$(\gamma - \alpha - 1) \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} - (\beta_i + 1) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i} - (\alpha + 1)(\beta_i + 1) \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0. \tag{13}$$

Faisons maintenant la somme des équations (13) et (12) pour toutes les valeurs de ν ; on a

$$(\gamma - \alpha - 2) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i} - (\alpha + 1) \frac{\partial G}{\partial x_i} - \beta_i \mathfrak{S}' - \beta_i (\alpha + 1) \mathfrak{S} = 0. \tag{14}$$

Enfin en sommant (14) pour $i = 1, 2, \ldots, k$, on obtient

$$\mathfrak{S}' = \frac{(\alpha + 1)(1 + \Sigma \beta_i) \mathfrak{S}}{\gamma - \alpha - 2 - \Sigma \beta_i} = \frac{\alpha (\alpha + 1) \Sigma \beta_i (\Sigma \beta_i + 1)}{\mu (\mu + 1)} \tag{15}$$

ce qui donne à l'aide de (14), de (10) et de (11)

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x_i} = \frac{\alpha (\alpha + 1)(\Sigma \beta_i + 1) \beta_i}{\mu (\mu + 1)}. \tag{16}$$

Les moments factoriels du second ordre sont obtenus de (12) à l'aide de (16) et de (11)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \, \partial x_\nu} = \frac{\alpha (\alpha + 1)}{\mu (\mu + 1)} \beta_i \beta_\nu = \frac{n (n - 1)}{m (m + h)} b_i b_\nu \tag{17}$$

et de (13) à l'aide de (16) et (11)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = \frac{\alpha (\alpha + 1)}{\mu (\mu + 1)} \beta_i (\beta_i + 1) = \frac{n (n - 1)}{m (m + h)} b_i (b_i + h). \tag{18}$$

On peut démontrer de même que le moment factoriel d'ordre s (7) est donné par

$$(19) \qquad \mathfrak{M}(c_1, c_2, \ldots, c_k) = \frac{\binom{n}{s}}{\binom{-\mu}{s}} \prod_{i=1}^{k} \binom{-\beta_i}{c_i} c_i!\ ^{6)}$$

Pour abréger, désignons par ξ_i les moments factoriels (11) du premier ordre et du premier degré en ν_i, de plus par η_{vw} les moments factoriels (17) du premier degré en ν_v et du premier degré en ν_w; enfin désignons par η_{vv} le moment factoriel (18) du second degré en ν_v.

Appelons écart la quantité $\nu_i - \xi_i$ et soit σ_i^2 la moyenne des carrés de ces écarts. En se servant d'une relation analogue à (9′) du § 1, les formules (11) et (18) donnent

$$(20) \qquad \sigma_i^2 = \frac{n b_i (m - b_i)(m + nh)}{m^2 (m + h)}.$$

Nous avons établi nos formules en supposant $h \neq 0$, néanmoins on peut montrer directement que les moments factoriels obtenus en posant dans (19) $h = 0$ sont identiques à ceux du problème de Bernoulli correspondant. Il résulte donc de (20) qu'en posant $h = 0$, on a

$$(21) \qquad \sigma_{iB}^2 = \frac{n b_1 (m - b_1)}{m^2};$$

en comparant (20) à (21), on voit que le signe de

$$\sigma_i^2 - \sigma_{iB}^2$$

est le meme que celui de h. On conclut que si h est plus petit que zéro, la somme des carrés des écarts sera plus petite que dans le problème correspondant de Bernoulli, et si $h > 0$, cette somme sera plus grande.

Inversement lorsque les k moments factoriels du premier ordre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ et deux des moments du second ordre (par exemple η_{vv} et η_{vw}) d'une fonction de fréquence statistique sont

---

6) Dans le cas $k = 2$, les dérivées partielles de F_1 sont données par la formule de M. Appell (loc. cit. p. 19) qui devient pour $x_1 = x_2 = 1$

$$\frac{\partial^s F_1}{\partial x_1^{c_1} \partial x_2^{c_2}} = \binom{-\alpha}{s} \binom{-\beta_1}{c_1} \binom{-\beta_2}{c_2} c_1!\, c_2!\, s!\, \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma \quad \beta_1 - \beta_2 - s)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2)}$$

où $c_1 + c_2 = s$. Pour obtenir les dérivées de $G(x_1, x_2)$ il faut encore diviser cette quantité par $F_1(1, 1)$. (loc. cit. p. 22.) En remarquant que $\gamma - \alpha - \beta_1 - \beta_2 - 1 = \mu$ on trouve immédiatement

$$\mathfrak{M}(c_1, c_2) = \frac{c_1!\, c_2!}{\binom{-\mu}{s}} \binom{-\alpha}{s} \binom{-\beta_1}{c_1} \binom{-\beta_2}{c_2}$$

conformément à la formule (19).

donnés, on peut déterminer à l'aide des formules (19) une fonction hypergéométrique à k variables admettant les moments donnés et l'on pourra voir si les probabilités tirées de cette fonction représentent bien la répartition statistique en question.

Pour résoudre le problème, on choisira les variables de manière à avoir $\mathfrak{M}(0, 0, \ldots, 0) = 1$. De la formule (11) on tire

$$\frac{\mu}{n} = \frac{\beta_1}{\xi_1} = \frac{\beta_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{\beta_k}{\xi_k};$$

de (18) il suit pour toutes les valeurs de v et w

$$\frac{\mu(\mu+1)}{n(n-1)} = \frac{\beta_v \beta_w}{\eta_{vw}}$$

et de (19)

$$\frac{\mu(\mu+1)}{n(n-1)} = \frac{\beta_1(\beta_1+1)}{\eta_{11}} = \frac{\beta_2(\beta_2+1)}{\eta_{22}} = \ldots = \frac{\beta_k(\beta_k+1)}{\eta_{kk}}.$$

Le résolution de ces équations donne

$$\beta_i = \frac{\xi_i \eta_{vw}}{\eta_{vv}\xi_w - \eta_{vw}\xi_v} \tag{22}$$

$$n = \frac{\xi_v \xi_w + \eta_{vv}\xi_w - \eta_{vw}\xi_v}{\xi_v \xi_w - \eta_{vw}} \tag{23}$$

$$\mu = \frac{n\beta_i}{\xi_i}. \tag{24}$$

Le signe de β_i est celui du dénominateur de (22); comme ce dernier est égal à $\dfrac{n(n-1)}{m(m+h)}\xi_w h$, il résulte que le signe des β_i, et de μ est le même que celui de h.

Lorsque ce dénominateur est nul, la fonction de fréquence peut être représentée par le problème de Bernoulli à k variables. En effet, les moments correspondant à ce cas satisfont à la relation

$$\eta_{vv}\xi_w - \eta_{vw}\xi_v = 0$$

il résulte alors

$$n = \frac{\xi_v \xi_w}{\xi_v \xi_w - \eta_{vw}} \quad \text{et} \quad \frac{b_i}{m} = \frac{\xi_i}{n}$$

et la probabilité en question sera

$$P(\nu_1, \ldots \nu_k) = \frac{n!}{\nu_1! \ldots \nu_{k+1}!} \prod_{i=1}^{k+1} \left(\frac{b_i}{m}\right)^{\nu_i}.$$

§ 7. Étant donnés les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, la probabilité pour que dans le problème du § 6 on ait en même temps

$\nu_i < \lambda_i + 1$ pour toutes les valeurs $i = 1, 2, \ldots, k$, est donnée par la formule

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{\binom{-\mu}{n}} \sum_{\nu_1=0}^{\lambda_1} \cdots \sum_{\nu_k=0}^{\lambda_k} \binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k} \prod_{i=1}^{k} \binom{-\beta_i}{\nu_i}.$$

§ 8. Considérons une urne contenant $b_1 = \beta_1 h$ boules marquées 1, $b_2 = \beta_2 h$ boules marquées $2, \ldots, b_{k+1} = \beta_{k+1} h$ boules marquées $k+1$. Lorsque les grandeurs β_i peuvent prendre les valeurs $1, 2, 3, \ldots$ compatibles avec $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k+1} = \mu$, on obtient $\binom{\mu - 1}{k}$ urnes différentes (d'après la formule de Monmort-Moivre), nous les considérons comme également probables.

On choisit une urne puis dans les conditions du § 6 on fait n tirages et l'on demande la probabilité d'obtenir ν_1 numéros 1, ν_2 numéros $2, \ldots, \nu_k$ numéros k. Elle est déduite de la formule (2) du § 6

$$P(\nu_1 \ldots \nu_k) = \frac{1}{\binom{\mu-1}{k}\binom{-\mu}{n}} \sum_{\beta_1} \sum_{\beta_2} \cdots \sum_{\beta_k} \binom{-\beta_1}{\nu_1} \cdots \binom{-\beta_k}{\nu_k} \binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k}$$

où β_i varie de 1 à $\mu - \beta_1 - \ldots - \beta_{i-1} - k - 1 + i$. D'après le § 3 la sommation par rapport à β_k donne

$$\sum_{\beta_k} \binom{-\beta_k}{\nu} \binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k} = - \binom{1 + \beta_1 - \ldots - \beta_{k-1} - \mu}{1 + n - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-1}};$$

cela étant, la somme par rapport à β_{k-1} sera

$$- \sum_{\beta_{k-1}} \binom{-\beta_{k-1}}{\nu_{k-1}} \binom{1 + \beta_1 + \ldots + \beta_{k-1} - \mu}{1 + n - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-1}} = \binom{2 + \beta_1 + \ldots + \beta_{k-2} - \mu}{2 + n - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-2}};$$

en continuant de la même manière on trouve que la somme en facteur de la probabilité cherchée est égale à

$$(-1)^k \binom{k - \mu}{k + n}$$

et enfin

$$P(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k) = \frac{1}{\binom{n+k}{k}}.$$

Il faut remarquer que cette probabilité est indépendante de h, de μ et des ν_i.

Dans le cas de $h < 0$, le nombre des urnes également possibles est $\binom{-\mu - 1}{k}$; les quantités $-\beta_i$ prennent les valeurs $1, 2, \ldots, (-\mu - 1)$ et l'on est conduit à la même formule que dans le cas de $h > 0$.

§ 9. *Probabilité des causes.* Une urne contient m boules marquées 1, ou 2 ou 3, ... ou $k+1$, en proportion inconnue. h étant positif, on a obtenu en n épreuves ν_1 boules marquées 1, ν_2 boules marquées 2, ... ν_k boules marquées k.

On demande la probabilité pour que l'urne contienne au début $b_i = \beta_i h$ boules marquées i pour $i = 1, 2, 3, \ldots (k+1)$, lorsque l'on considère les valeurs $\beta_i = 1, 2, 3, \ldots (\mu - 1)$ comme également probables pourvu que l'on ait $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k+1} =$.

Le théorème de Bayes appliqué à la formule (2) du § 6 donne

$$(1)\quad p(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \frac{1}{\binom{k-\mu}{k+n}} \binom{-\beta_1}{\nu_1}\binom{-\beta_2}{\nu_2}\cdots\binom{-\beta_k}{\nu_k}\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k}.$$

En effet d'après le § 8, la somme de ces probabilités dans les conditions ci-dessus est égale à l'unité.

De la probabilité (1) on déduit la probabilité $\mathfrak{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k)$ pour que l'on ait en même temps $\beta_i \leqq \tau_i$ pour $i = 1, \ldots k$.

$$(2)\qquad \mathfrak{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k) = \sum_{\beta_1 = 1}^{\tau_1} \ldots \sum_{\beta_k = 1}^{\tau_k} p(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k).$$

Le § 3 donne la somme indéfinie

$$\sum_{\beta_k} \binom{-\beta_k}{\nu_k}\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_k - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k} =$$
$$= \sum_{x_k} (-1)^{x_k+1} \binom{\beta_k + x_k - 2}{x_k}\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_{k-1} - \mu}{n - \nu_1 - \ldots - \nu_k - x_k}$$

la limite inférieure de x_k étant $\nu_k + 1$ et la limite supérieure $n + 1 - \nu_1 - \ldots - \nu_{k-1}$. Pour obtenir la somme définie il suffit de remplacer β_k par $\tau_k + 1$, car à la limite inférieure $\beta_k = 1$ cette expression est nulle. Il résulte donc pour la somme définie

$$\sum_{x_k} \binom{-\tau_k}{x_k}\binom{1 + \beta_1 + \ldots + \beta_k - \tau_k - \mu}{n + 1 - \nu_1 - \ldots - \nu_k - x_k}.$$

On continue la sommation par rapport à β_{k-1}, puis $\beta_{k-1}, \ldots$ et β_1. On se sert de la même formule. En supposant que les τ_i sont indépendants des β on arrive à la probabilité cherchée:

$$(3)\quad \mathfrak{p}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k) =$$
$$= \frac{1}{\binom{k-\mu}{k+n}} \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_k} \binom{-\tau_1}{x_1}\cdots\binom{-\tau_k}{x_k}\binom{k + \tau_1 + \ldots + \tau_k - \mu}{k + n - x_1 - \ldots - x_k}$$

x_s variant de $\nu_s + 1$ à $n + 1 + k - \nu_1 - \ldots - \nu_{s-1} - s$.

Conclusions. 1. $h>0$. On a obtenu, dans les conditions du § 6, en n épreuves ν_i boules marquées i (où $i=1,2,\ldots,k+1$) d'une urne contenant $m=\mu h$ boules numérotées de 1 à $k+1$ en proportion inconnue. On considère les compositions contenant h, $2h,\ldots,(\mu-k)h$ boules marquées i (où $i=1,2,\ldots,k+1$) comme également probables pourvu que l'on ait $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{k+1}=\mu$.

La probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules marquées i, contenues dans l'urne ne dépasse pas $b_i=\beta_i h$ (où $i=1,2,\ldots,k$) est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules marqués i, obtenues en $n+k$ épreuves, dans les conditions du § 6, d'une urne contenant au début $m-kh$ boules dont $b_i=\beta_i h$ boules marquées i, dépasse ν_i $(i=1,2,\ldots,k)$.

2. $h<0$. On a obtenu dans les conditions du § 6 en n épreuves ν_i boules marquées i d'une urne contenant $m=\mu h$ boules numérotées de 1 à $k+1$ en proportion inconnue. On considère les compositions contenant $-h,-2h,\ldots,(-\mu+k)h$ boules marquées i comme également probables $(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{k+1}=\mu)$

La probabilité à *posteriori* pour qu'au début le nombre des boules marquées i, contenues dans l'urne ne dépasse pas $b_i=\beta_i h$ est égale à la probabilité à *priori* pour que le nombre des boules marquées i, obtenues en $n+k$ épreuves, dans les conditions du § 6, d'une urne contenant au début $m-kh$ boules, dont b_i-h boules marquées i, dépasse ν_i $(i=1,2,\ldots,k)$.

(Reçu le 23 mai 1927)